

A HALÁLOKI KONCENTRÁCIÓ ÉLETKORI VÁLTOZÁSAINAK LEHETSÉGES MAGYARÁZATÁRÓL

Izsák János

Pénzügyi és Számviteli Főiskola Zalaegerszegi Intézete

A demográfia és az epidemiológia művelői előtt nem ismeretlen a haláloki koncentráció fogalma, vagyis az, hogy a halálesetek feltűnően egyenetlenül oszlanak meg a haláloki kategóriák körében. Közismert, hogy a haláloki koncentráció az utóbbi évtizedekben növekedett. Ennek okaként általában az idős korúak népességbeli arányának növekedését jelölik meg, annak jogos feltételezésével, hogy idős korban nagyobb a haláloki koncentrálttság.

A kérdéskörnek egészségügyi szervezési jelentősége is van, főleg akkor, ha a mortalitási koncentráció helyett a morbiditási koncentráció kérdését vetjük fel. Nem mindegy ugyanis, hogy a koncentrálttság tükörképeként hogyan alakul a szakellátás intézményeinek koncentrálttsága.

Világos, hogy a népesség haláloki koncentrációjának változásában a korstruktúra változása mellett egyéb tényezőkkel is számolni kell. Ezeket azonban csak úgy választhatjuk el a korstruktúra változásának hatásától, ha utóbbit részleteiben ismerve, a populációt a korstruktúrára nézve normáljuk. Első feladatnak tehát mindenképpen a haláloki koncentráció életkori változásainak nyomon követése tekintendő.

A legutóbbi Neumann Kollokviumon beszámoltunk arról, hogy a haláloki diverzitás - mely mintegy ellentéte a haláloki koncentrációnak -, a reprodukтив életszakaszig növekszik, majd - eltekintve a férfi csoportnál tapasztalható beöblösödéstől, mely minden bizonnyal civilizációs hatás következménye - folyamatosan csökken /vö. [1]/.

Ezen jelenség modellezésére és magyarázatára a haláloki kockázati függvények tűnnek különösen alkalmasnak. Ismeretes, hogy a haláloki kockázat a 35.-75. életév között a legtöbb halálok esetében igen meredeken emelkedik, és pedig exponenciális függvény /un. Gompertz-függvény/ vagy hatványfüggvény /un. Weibull-függvény/ szerint. Ha most azt az ideális esetet tételezzük fel, hogy a szóban forgó 35. és 75. életév között a kockázati függvény minden halálokra vonatkozóan

$a_i e^{b_i t}$ alaku exponenciális függvény vagy mindegyikre a $a_i t^{b_i}$ alaku hatványfüggvény, akkor könnyű magyarázatot találni a diverzitás életkori csökkenésére, másképp, a haláloki koncentráció életkori növekedésére.

A magyarázat alapgondolata az, hogy a közel azonos helyen minimumot elérő kockázati grafikonok a minimumhelytől jobbra vagy balra haladva a lineárisnál nagyobb ütemben távolodnak egymástól. Tekintsük az egzakt bizonyítást az un. Hill-féle diverzitási indexcsalád indexeire. Az indexcsalád képlete

$$N_a = \left(\frac{\sum_{j=1}^s p_j^a}{s} \right)^{\frac{1}{1-a}} \quad /a \neq 1/,$$

ahol s a kategóriák száma, p_j a j -edik kategória /elméleti/ valószínűsége.

sége $/\Sigma p_j = 1/$. N_1 a $\lim_{i \rightarrow \infty} N_a$ határértékként értelmezhető. Ezen index-családhoz sorolható nagyon sok gyakran használt diverzitási index, többek között - H' -vel jelölve a (p_1, p_2, \dots, p_s) polinomiális eloszlás entrópiáját - az $N_1 = \exp(H')$ azonosság révén maga az entrópia is. Vegyük figyelembe, hogy p_j - illetve a t életkort is figyelembe véve $p_j(t)$ - becslése a következő módon történhet:

$$p_j(t) \approx \frac{n_j(t)}{n(t)} \approx \frac{\lambda_j(t)}{\sum_i \lambda_i(t)},$$

ahol $n_j(t)$ a j -edik halálokban meghaltak száma a t középpontú életkor intervallumban /ennek szélessége esetünkben 5 év/, $n(t)$ ugyanitt az összes meghaltak száma, λ_j a j -edik halálok kockázati függvénye.

Ekkor $N_a(t)$ becslése:

$$N_a(t) \approx \hat{N}_a(t) = \left(\sum_{j=1}^s \left[\frac{\lambda_j(t)}{\sum_i \lambda_i(t)} \right]^a \right)^{\frac{1}{1-a}} \quad /a \neq 1/.$$

Megmutatható, hogy $N_a(t)$ -nek t szerinti deriváltja kellően nagy t_0 -nál nagyobb t -re negatív, azaz t_0 feletti életkorra a Hill-féle diverzitás az életkor növekedésével csökken. /Kellő simasági feltételek mellett $\hat{N}_a(t)'$ is jó közelítése $N_a(t)'$ -nek./

A derivált negatív voltának belátása:

$$\begin{aligned} \frac{dN_a(t)}{dt} &= \frac{1}{1-a} \left(\sum_j \left[\frac{\lambda_j(t)}{\sum_i \lambda_i(t)} \right]^a \right)^{\frac{1}{1-a} - 1} \cdot a \cdot \sum_j \left[\frac{\lambda_j(t)}{\sum_i \lambda_i(t)} \right]^{a-1} \frac{\lambda_j(t)' \sum_i \lambda_i(t) - \lambda_j(t) \sum_i \lambda_i(t)'}{\left(\sum_i \lambda_i(t) \right)^2} = \\ &= \frac{a}{1-a} \left(\sum_j \left[\frac{\lambda_j(t)}{\sum_i \lambda_i(t)} \right]^a \right)^{\frac{a}{1-a}} \left(\sum_i \lambda_i(t) \right)^{-(a+1)} \left\{ \sum_j \left[\lambda_j(t)^{a-1} \lambda_j(t)' \left(\sum_i \lambda_i(t) - \lambda_j(t) \sum_i \lambda_i(t)' \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{a}{1-a} \left(\sum_j \left[\frac{\lambda_j(t)}{\sum_i \lambda_i(t)} \right]^a \right)^{\frac{a}{1-a}} \left(\sum_i \lambda_i(t) \right)^{-(a+1)} \left\{ \sum_{i < j} \left(\lambda_j(t)^{a-1} - \lambda_i(t)^{a-1} \right) \left[\frac{\lambda_j(t)}{\lambda_i(t)} \right]' \lambda_i(t)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ha tehát olyan λ_i függvényekről van szó, melyek úgy rendezhetők, $t > t_0$ -ra

$$\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \dots < \lambda_s(t) \quad \text{és} \quad (\lambda_j(t)/\lambda_i(t))' > 0 \quad (i < j)$$

fennáll, akkor - figyelembe véve az egyes tényezők előjelét - a derivált minden pozitív a paraméter mellett negatív. E feltételeket mind az exponenciális, mind a hatványfüggvény típusu kockázati függvénysegreg azonnal beláthatóan kielégíti. Így a halálteki diverzitás jellegzetes életkori csökkenését /illetve a halálteki koncentráció növekedését/

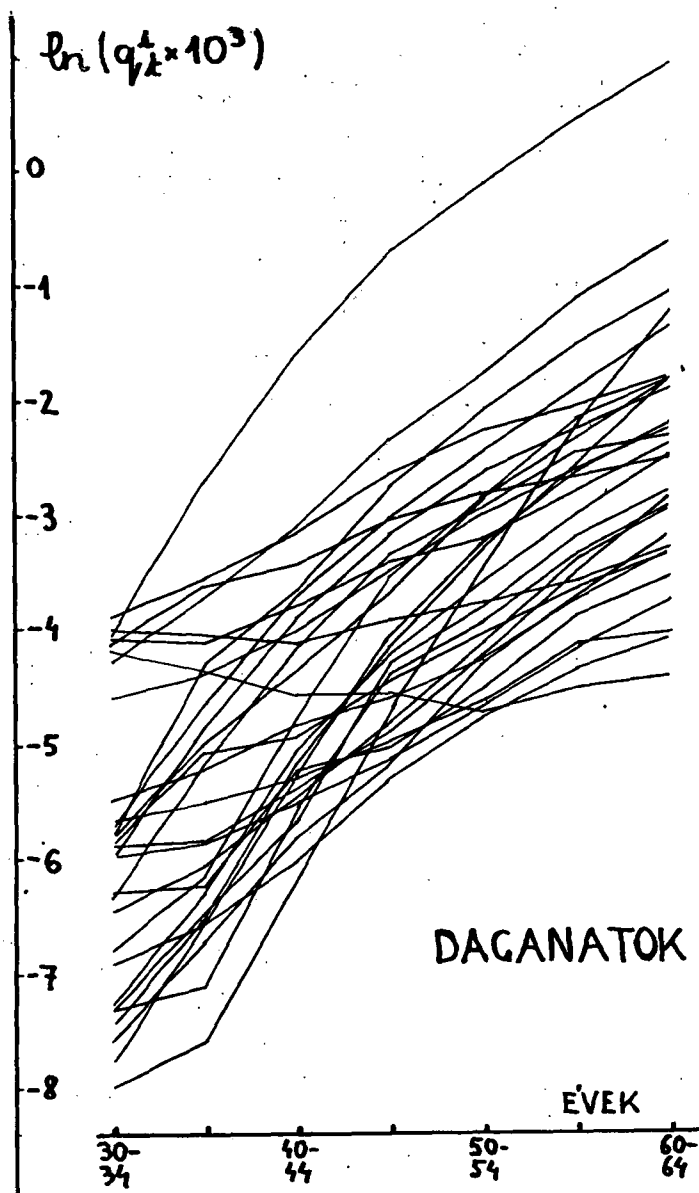
a kockázati függvényesereg egy tulajdonságára vezettük vissza *akkor*, ha a λ_1 kockázati függvényesereg exponenciális vagy hatványfüggvény természetűnek feltételezhető.

Utóbbira nézve tájékozódó vizsgálatot végeztünk. A vizsgálat a már említett amerikai haláloki statisztika 1974+75-ös összevont adatai alapján történt, a Betegségek Nemzetközi Osztályozásának azon háromjegyű kategóriáira, melyek egyrészt szerepeltek korábbi diverzitási vizsgálatainkban, másrészt melyeket a 35-39 éves korúak csoportjában 1974-ben és 1975-ben összesen legalább 5 alkalommal regisztráltunk. Így a vizsgálat kerekén 100 halálokra terjedt ki. A korintervallum választását az indokolta, hogy az exponenciális illeszthetőséget a szakirodalom általában erre az időszakra teszi. A haláloki kockázati függvények közelítései helyett a $q_t^{(i)} = D_t^{(i)} / P_t$ haláloki hányadosokat vettük figyelembe; itt $D_t^{(i)}$ a $t=37,5; 42,5; \dots; 77,5$ koréhez rendelt fehér férfi "i" halálesetek száma 1974+75-ben, P_t pedig a megfelelő korintervallum 1974-es és 1975-ös évközepe becsült lélekszámának összege 500-as pontossággal. /Az illesztést a $q_t^{(i)} \approx \Delta t \cdot \lambda_1(t)$ összefüggés alapján tulajdonképpen elegendő a $q_t^{(i)}$ értékekre vizsgálnunk/.

A továbbiakban technikai okokból $q_t^{(i)} \cdot 10^5$ -re tértünk át, ami következtetéseinket nem érinti, majd a $(t; \ln(q_t \cdot 10^5))$ ill. $(\ln t; \ln(q_t \cdot 10^5))$ pontpárokhoz illesztettünk egyenest a legkisebb négyzetek elve szerint annak megfelelően, hogy exponenciális vagy hatványfüggvény illesztéséről volt-e szó. Az illeszkedés mértékéül a d determinációs együtthatót, mint a lineáris korrelációs együttható négyzetét fogadtuk el. Ennek alapján ítélve, mind az exponenciális, mind a hatványfüggvény illeszthetősége csekély számu kivételtől eltekintve jónak mondható. /45 esetben az exponenciális, 55 esetben a hatványfüggvény illeszthetősége bizonyult jobbnak. Ezek szerint egyik modellt sem részesíthetjük egyértelmű előnyben a másikkal szemben./ Az illeszthetőség megfelelő voltát szemlélteti az 1. ábra, melyen a vizsgálatba bevont 29 daganatos halálok $\ln q_t^{(i)}$ grafikonját ábrázoltuk. A logaritmált $q_t^{(i)}$ értékek közel lineáris lefutása a kockázati függvények exponenciálisához közeli természete mellett szól.

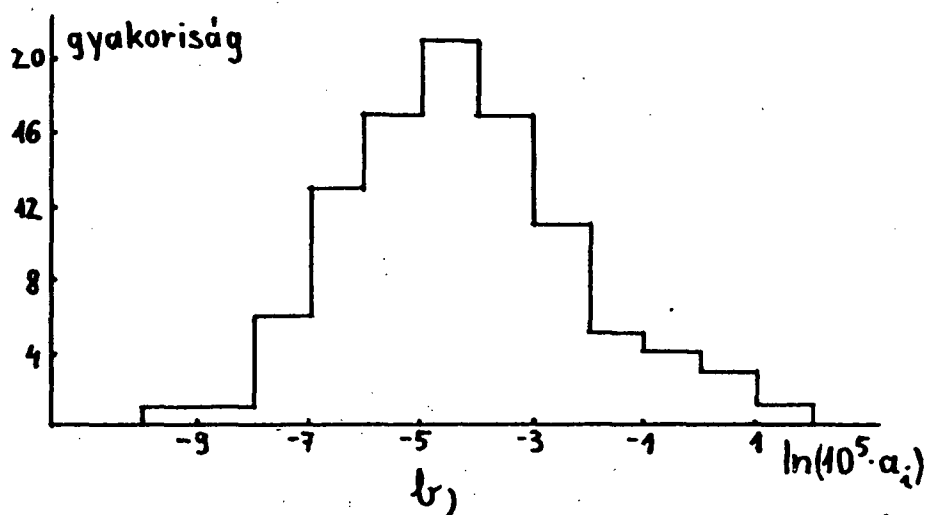
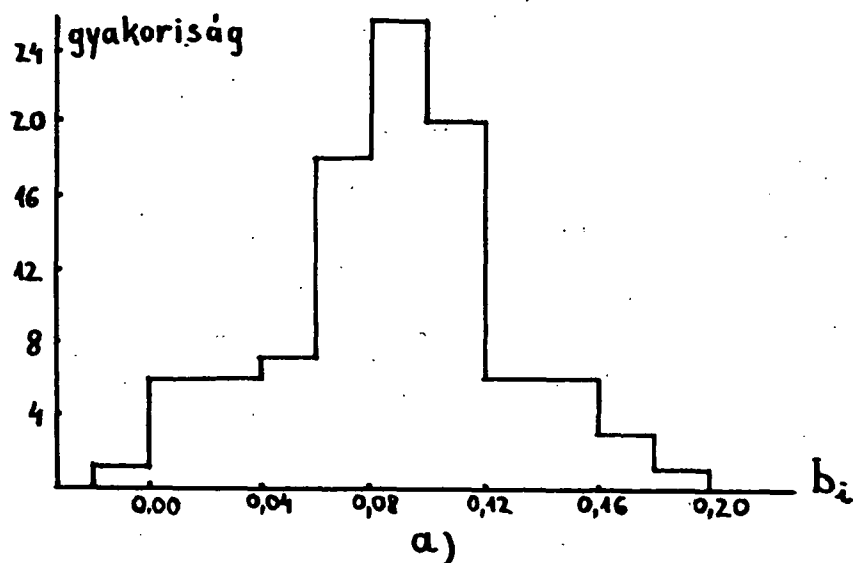
Alkalmas a kockázati függvények bevezetése egy másik korábban leírt jelenség új megvilágításba helyezésére is. Mint leírtuk [2,3], adott korcsoport haláloki esetszámaihoz általában jól illeszthető /csonkitott/ lognormalis eloszlás.

Ezzel kapcsolatban tekintsük a t időponthoz tartozó $(n_t^{(1)}, n_t^{(2)}, \dots, n_t^{(s)})$ vektor helyett az $n_t^{(i)} \approx \lambda_1(t) \cdot n_t \cdot \Delta t$ összefüggés szerint hozzá közeli $n_t \cdot \Delta t \cdot (\lambda_1(t), \dots, \lambda_s(t))$ vektort. Világos, hogy az $n_t^{(i)}$ esetszámok lognormalitásának vizsgálatáról áttérhetünk a $\lambda_1(t)$ specifikus haláloki kockázati függvényértékek lognormalitásának, vagy az $\ln \lambda_1(t)$ értékek normalitásának vizsgálatára. Minthogy Gompertz függvények esetén $\ln \lambda_1(t) = \ln a_1 + t \cdot b_1$, Weibull függvények esetén pedig



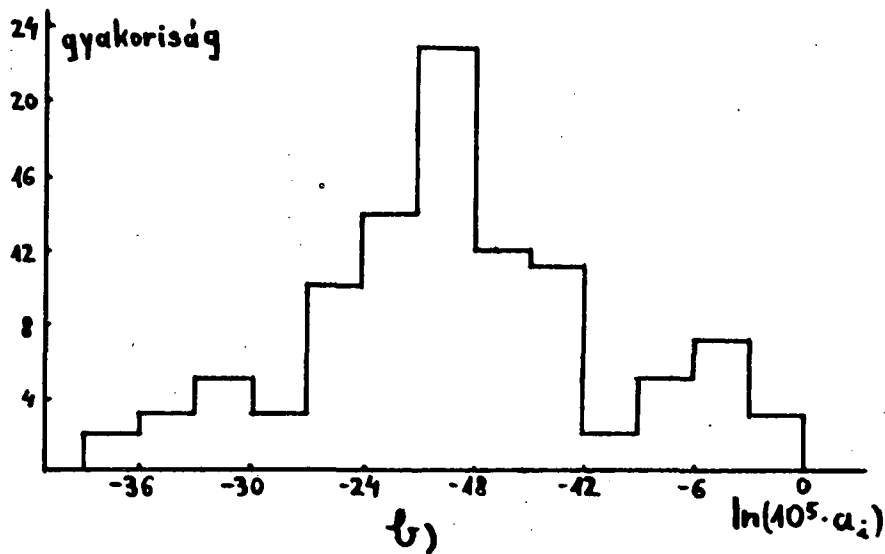
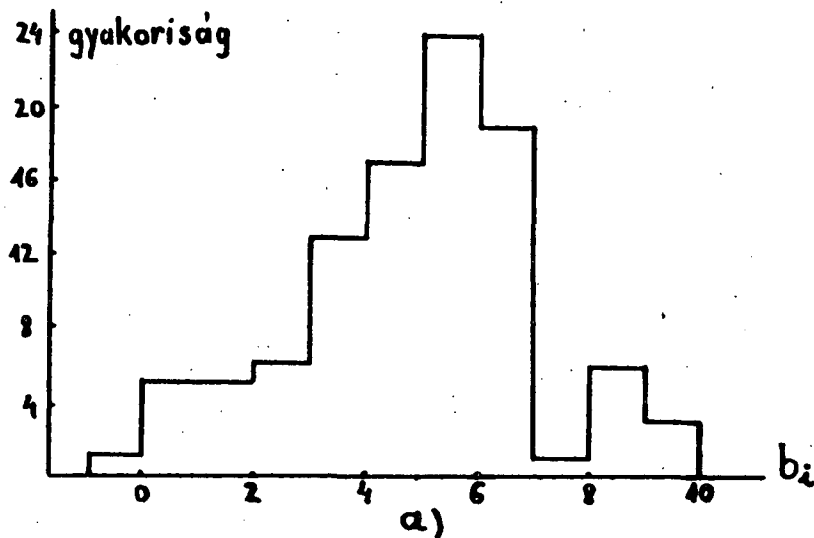
1. ábra. Specifikus haláloki ráták grafikoncserege, logaritmusos ábrázolás. U.S.A. fehér férfi 1974+75-ös csoport

$\ln \lambda_i(t) = \ln a_i + (\ln t) \cdot b_i$; az $\{a_i, i=1,2,\dots,s\}$ paraméterhalmaztól függően kellően nagy t -re a b_i paraméterek normális eloszlása esetében az $n_t^{(i)}$ frekvenciák eloszlása valóban közel normális eloszlás, akár Gompertz, akár Weibull típusú függvényekről van szó. Ez a magyarázat szerepet játszhat abban a kissé még meglepő jelenségben is, hogy a frekvenciák lognormalitása nem csak rövid életszakaszban, hanem széles életkor-tartamban érvényesül.



2. ábra. $a_i \exp(b_i t)$ Gompertz-függvények b_i és $\ln a_i$ paramétereinek hisztogramja /a) ill. b)/

Konkrét vizsgálati anyagunk esetében illesztési eljárásunk a következők megállapítására vezetett: A Gompertz függvény b_i és $\ln a_i$ paramétereinek eloszlása a 2. ábra hisztogramjairól leolvashatóan legalábbis jól közelíthető normális eloszlással. A Weibull függvény esetében a b_i és $\ln a_i$ mennyiségek hisztogramja /3. ábra/ már kevésbé szól normális eloszlás mellett. A frekvenciák /csonkitott/ lognormalitása tehát valóban közvetlen kapcsolatban lehet a fenti paraméterek /csonkitott/ normális eloszlásával. Ez irányt szab a további ezirányu vizsgálatoknak.



3. ábra. $a_i t^{b_i}$ Weibull-függvények b_i és $\ln a_i$ paramétereinek hisztogramja /a) ill. b)/

Visszatérve $\hat{N}_a(t) (\approx N_a(t))$ t szerinti deriváltjának negativitására, két megjegyzést teszünk:

- /i/ A korai életszakaszra eső halálteki diverzitás-növekedés /koncentráció-csökkenés/ hasonló alapon magyarázható, mint a diverzitás későbbi csökkenése.
- /ii/ A fentiekből következik az is, hogy ha egy rendszer olyan komponensekből áll, melyek meghibásodására a Gompertz /más néven Gumbel/ törvény érvényes, akkor a meghibásodási események entrópiája adott t_0 időtartam után a rendszer életkorának növekedtével csökken. Ehhez elegendő figyelembe vennünk a fentebb említett

$N_1 = \exp(H')$ azonosságot.

Ami a diverzitás jellegzetes életkori változásait illeti, a fenti modell ezeket a változásokat könnyebben áttekinthetővé és értelmezhetővé teszi, a jelenség biológiai magyarázatához azonban nem nyújt alapot. A 25.-30. életévre eső halálkori diverzitási maximum magyarázatának nyitja az lehet, hogy evolúcióelméleti és populáciodinamikai megfontolások szerint [4], ill [5]/ a reprodukciós életszakaszra a halálozási ráták nemcsak alacsony szintre süllyednek, de relative is közelebb kerülnek egymáshoz. Mindez természetesen csak lehetséges magyarázat.

Feltárva a halálkori diverzitás /ill. halálkori koncentráció/ életkori alakulását és magyarázatának alkalmas megközelítési módját, vizsgálatainkat a jövőben elsősorban a népesség halálkori koncentrációjának változásaira kívánjuk kiterjeszteni.

Irodalom

- [1] Izsák J. és Juhász Nagy Pál /1980/ Halálozási diverzitás korcsoportok és nemek szerinti vizsgálatára. "Számítástechnikai és Kibernetikai Módszerek Alkalmazása az Orvostudományban és a Biológiában" /A 10. Szegedi NJSZT Kollokvium anyaga/, 127-135.
- [2] Izsák, J. and P. Juhász-Nagy /1981/ Frequency distributions of death cases: fitting in a case-study. Proceedings of the 3rd Hungarian Biometric Conference, 207-211.
- [3] Izsák, J. and P. Juhász-Nagy /1982/ Studies of lognormality on mortality statistics. Biometrical Journal /in press/
- [4] Williams, G. C. /1957/ Pleiotropy, natural selection and the evolution of senescence. Evolution 11, 398-411.
- [5] Emlen, J. M. /1970/ Age specificity and ecological theory. Ecology 51, 588-601.